

НОВЫЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О РЮКЗАКЕ

В.Н.Крейнович, С.Ю.Шукейло
(Ленинград)

1. Классическая задача о рюкзаке состоит в следующем: даны n предметов объёмов a_i и стоимостей c_i ($i = \overline{1, n}$) и рюкзак, объёма α . Необходимо так заполнить рюкзак, чтобы общая стоимость попавших в него предметов была бы наибольшей. Если $x_i = 1$, то предмет взят и $x_i = 0$, если — не взят, то постановка задачи модифицируется следующим образом: $\sum c_i x_i \rightarrow \max$ при условии $\sum a_i x_i \leq \alpha$ и $x_i \in \{0, 1\}$. Интерес к этой задаче связан с тем, что она: 1) естественно возникает в экономических приложениях, и 2) — NP-трудная и, значит, к ней сводятся многие дискретные задачи. Известные методы решения задачи о рюкзаке при больших n работают плохо. В работе предлагается новый метод, ориентированный на случай больших n .

2. Идея метода. Задача о рюкзаке легко сводится к решению системы неравенств $S: \sum a_i x_i \leq \alpha, \sum c_i x_i \geq \gamma, x_i \in \{0, 1\}$ для равных γ . Для решения этой системы используется стратегия увеличения свободы выбора, впервые предложенная С.Ю. Масловым для проверки выполнимости позициональных формул. Если для любой системы неравенств можно было бы точно вычислить число решений, то алгоритм действий был бы следующим: для всех $i = \overline{1, n}$ и $\varepsilon \in \{0, 1\}$ считается число решений $N(i, \varepsilon)$ системы $S(i, \varepsilon)$, получающейся из исходной подстановкой $x_i = \varepsilon$; выбираются такие i и ε , для которых $N(i, \varepsilon) \geq 1$ (т.е. у $S(i, \varepsilon)$ есть решение); затем подставляется $x_i = \varepsilon$ в систему $S(i, \varepsilon)$ и повторяется процедура до тех пор, пока не сформируется вектор $\{x_i\}$, удовлетворяющий обоим неравенствам.

В действительности же точная оценка $N(i, \varepsilon)$ неизвестна. Можно получить только приближённую оценку $\tilde{N}(i, \varepsilon)$ числа реше-

ний. Для всех i и ε системы $S(i, \varepsilon)$ вычисляются $\tilde{N}(i, \varepsilon)$. Чем больше $\tilde{N}(i, \varepsilon)$, тем более вероятно, что $N(i, \varepsilon) \geq 1$, поэтому на каждом шаге выбираются такие i и ε , при которых $\tilde{N}(i, \varepsilon)$ максимальна.

Для оценки числа решений системы применяется вероятностный подход. Если в качестве $\{x_i\}$ возьмем независимые случайные величины, каждая из которых равновероятно принимает значения 0 или 1, то вероятность p выполнения системы неравенств равна $2^{-n} N$, поэтому $N = 2^n \cdot p$. При больших n , в силу центральной предельной теоремы, закон совместного распределения пар случайных величин $A = \sum a_i x_i$ и $C = \sum c_i x_i$ близок к нормальному, поэтому можно определить как вероятность того, что для двух нормально распределенных величин A и C с известными моментами I и II порядков выполняются неравенства $A \leq a$, $C \geq c$. Эта вероятность, в свою очередь, легко рассчитывается как 2-мерный интеграл от гауссианы.

3. Замечания к программной реализации. По мере нахождения x_i уменьшается n , а при малых n центральная предельная теорема уже не работает. Поэтому, подходя к достаточно малым n , необходимо использовать известные методы.

Удобно заранее линейным преобразованием координат привести гауссиану к стандартному виду $\exp(-1/2(x^2 + y^2))$. При больших n вклад каждой из переменных x_i невелик, поэтому область интегрирования, соответствующая системе $S(i, \varepsilon)$, мало отличается от области, соответствующей исходной системе S . Следовательно, достаточно интегрировать стандартную гауссиану по узкой полосе между этими областями.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ
"ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
И УПРАВЛЕНИЕ НАРОДНЫМ ХОЗЯЙСТВОМ"

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

III ВСЕСОЮЗНАЯ ШКОЛА

"ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И КОМПЬЮТЕРЫ"
(теория, методы, программное обеспечение
и приложения в экономике, информатике, технике)

г.Таштагол, 2-9 декабря 1987г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва
1987

Ответственные редакторы

**доктор экономических
наук**

Фридман А.А.

**кандидат технических
наук**

Левнер Е.В.

© **Центральный экономико-математический институт
АН СССР, 1987г.**

Все
компьюте
дискретн
зацией.
ного мы

Цел
достижен
програм
информа
Среди л
дискрет

В
Разви
ционн
Байес
Вопре
Стох
моль
Погр
дово
Экст
Новь
тов.
Дис
Про
ких
В.Н
Про
раб
Про
рат
Пре
В.А
Гло