

Математическая, статистическая и компьютерная поддержка качества измерений

Аттестация программного обеспечения, используемого в метрологии

5 июня - 7 июня 2012, Санкт-Петербург



Mathematics, Statistics and Computation to Support Measurement Quality

Validation of Software Used in Metrology

5 June - 7 June, 2012, Saint-Petersburg

Программа

Тезисы

Program

Abstracts

Метрологическое автосопровождение программ обработки результатов прямых измерений

В.Я.Крейнович¹, Л.К.Резник², К.К.Семенов³, Г.Н.Солопченко⁴

¹ Профессор университета в Эль-Пасо, Техас, США, e-mail: vladik@cs.utep.edu

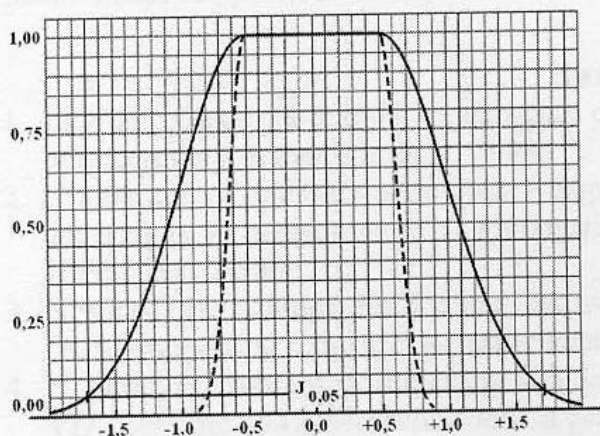
² Профессор технологического института, Рочестер, США, e-mail: lr@cs.rit.edu

³ Ассистент и ⁴ профессор политехнического университета, Санкт-Петербург, Россия, e-mail: semenov.k.k@gmail.com, g.n.solopchenko@mail.ru

Свойством метрологического автосопровождения обладают программы вычислений, исходными данными которых являются результаты измерений, а выходные данные содержат не только результат каждого вычисления, но и интервальную характеристику его погрешности. В англоязычной литературе для описания подобных программ применяются термины "self-validation", "self-verification", "self-assurance". Метрологическое автосопровождение программ может быть обеспечено использованием в них:

- интервальной арифметики в различных вариантах и расширениях,
- совместным применением представления погрешностей в виде нечетких переменных и автоматического дифференцирования функций, выраженных программным кодом.

Программа, в которой тип данных всех значимых переменных, в том числе и результата вычислений, определен, как interval и все арифметические действия выполняются по правилам интервальной арифметики, обладает свойством метрологического автосопровождения, но при этом ширина интервала погрешности результата вычисления, как правило, сильно завышается. Простым примером такого завышения является расчет погрешности среднего арифметического нескольких значений, случайные погрешности которых с вероятностью $P < 1$ лежат в известных интервалах. Ширина интервала для погрешности результата с увеличением числа слагаемых не уменьшается. Это говорит о том, что интервальная арифметика адекватно может представлять только систематическую погрешность.



Раздельное представление единым математическим аппаратом систематической и случайной составляющих погрешности обеспечивается нечетким интервалом, введенным в работах Л. К. Резника. Функция принадлежности (ФП) нечеткого интервала определена как криволинейная трапеция, показанная на рисунке непрерывной кривой. Положено, что боковые стороны трапеции суть половины гауссианы, вложенный интервал J_α — интервал, содержащий не менее $P = 1 - \alpha$ доли погрешности

результата прямого измерения, границы верхнего основания — пределы допускаемой систематической составляющей погрешности. Тогда при усреднении n результатов прямых измерений, выраженных нечеткими интервалами, длина верхнего основания ФП среднего не изменяется по сравнению с функцией принадлежности слагаемых, а проекции боковых сторон уменьшаются обратно пропорционально $\sqrt{n}$, как это показано на рисунке пунктирной линией (для случая $n = 16$). Это соответствует теории вероятностей и математической статистике. Однако нелинейные преобразования затрудняют выполнение математических операций с нечеткими интервалами, и поэтому с целью

Metrological Self-Assurance of Data Processing Software

¹V.Ya.Kreinovich, ²L.K.Reznik, ³K.K.Semenov, ³G.N.Solopchenko

¹ Professor of University of Texas, El-Paso, USA, e-mail: vladik@cs.utep.edu

² Professor of Rochester Institute of Technology, New York, USA, e-mail: lr@cs.rit.edu

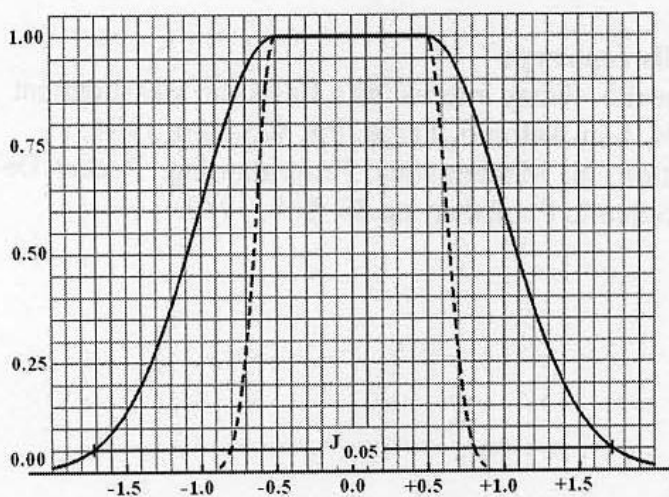
³ Assistant professor and professor of Saint-Petersburg State Polytechnic University, Russia, e-mail: semenov.k.k@gmail.com, g.n.solopchenko@mail.ru

Computer program for measurement data processing has metrological self-assurance if it provides interval characteristics of uncertainty for each calculation result. This property is called "self-validation", "self-verification" of computer programs in some publications. Metrological self-assurance can be achieved by using:

- interval arithmetic in different variants and extensions,
- combination of uncertainty representation as fuzzy interval and automatic differentiation of functions, which are presented by program code.

If data type of all variables in program is defined as "interval" and all arithmetic operations are performed in accordance with interval arithmetic, then this software has metrological self-assurance. But at the same time the error interval width for final calculation result is usually greatly overestimated. The simple example of such overestimation is error calculating for the mean value of the set of direct measurements results, random errors of which are inside the known intervals with the probability $P < 1$. The width of mean error interval doesn't decrease when number of averaging values increases. It illustrates that interval arithmetic can sufficiently process only the systematic errors.

The separate representation of systematic and random error components inside one mathematical object can be achieved by fuzzy interval introduced by L. K. Reznik [1]. Fuzzy interval membership function (MF) can be determined as curvilinear trapezium, which is presented on picture by the solid line. The trapezium latter sides are halves of Gaussian curve,



nested interval J_{α} is interval that contains not less than $P = 1 - \alpha$ part of error, the upper side boundaries are the limit values of systematic error component. Then the mean of n measurements results that are represented by fuzzy intervals will have MF such that the MF trapezium upper side for the mean value will be the same with MF trapezium upper side of averaging fuzzy intervals and the projection of latter sides will reduce proportionally $\frac{1}{\sqrt{n}}$ as it illustrated by dashed

line on picture (for $n = 16$). These results agree with the probability theory and mathematical statistics. Unfortunately, nonlinear transformations make performing mathematical operations with fuzzy intervals difficult. That's why the linearization based on Clifford algebra of dual numbers was used for the metrological self-assurance achievement. Its main idea is to replace calculations with real numbers by calculations with dual numbers $D = (a, b)$, where $a = a(t)$ is the real part of dual number and $b = a'(t)$ is infinitesimal part. Such linearization is called automatic differentiation [2].

All arithmetic operations for the dual numbers are determined in such manner:

реализации метрологического автосопровождения программ была выполнена линеаризация с помощью специального дифференцирования, основанного на алгебре Клиффорда и математического аппарата дуальных чисел $D = (a, b)$, где $a = a(x)$ – действительная часть, $b = a'(x)$ – инфинитезимальная часть. Такое дифференцирование в англоязычной литературе именуется автоматическим дифференцированием программно-го кода.

Для дуальных чисел определены все арифметические операции

$$\begin{aligned} D_1 \pm D_2 &= (a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2), \\ D_1 \cdot D_2 &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1), \\ \frac{D_1}{D_2} &= \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}{a_2^2} \right), \end{aligned}$$

а также функциональное преобразование $f(D) = (f(a), f'(a))$.

Реализация автоматического дифференцирования не требует вычисления конечных разностей, оно выполняется при каждом вычислении каждого результата с точностью до машинного нуля. Благодаря объединению в одной программе нечетких интервалов и упомянутого дифференцирования при выполнении каждого вычисления на выходе программы пользователь получает результат вычисления и интервальную характеристику его погрешности. Это свидетельствует о том, что такие программы обладают свойством метрологического автосопровождения.

В представленном докладе изложены аргументы в пользу использования нечеткого интервала для выражения погрешности. Эти аргументы основаны на результатах, полученных независимо П. В. Новицким, М. А. Земельманом, В. Я. Крейновичем, а также на правилах представления погрешностей измерений, регламентированных отечественными нормативными документами. В докладе приводятся примеры незначительной модернизации программ с целью придания им свойства метрологического автосопровождения. Метрологическая аттестация таких программ выполняется путем вычислительных экспериментов методом Монте-Карло.

Литература

1. L.K. Reznik, W.C. Jonson, G.N. Solopchenko. Fuzzy interval as a Basis for Measurement Theory, in Proc. NASA Conf. NAFIPS'94. San-Antonio, Texas. Pp. 405–406, 1994.
2. A. Griewank. On Automatic Differentiation, in: Mathematical Programming: Recent Developments and Applications. Kluwer Academic Publisher, pp.83–108, 1989.

$$D_1 \pm D_2 = (a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2),$$

$$D_1 \cdot D_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1),$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}{a_2^2} \right) \text{ and}$$

in addition the functional transformation $f(D) = (f(a), f'(a))$.

The automatic differentiation doesn't request calculating finite differences. It produces accurate derivatives for each calculation fast. So if uncertainty representation as fuzzy intervals and automatic differentiation are combined in one program, user of this software will get for each calculation result interval characteristic of its error. This indicates that such software has metrological self-assurance.

In the report arguments to use fuzzy interval for uncertainty expression are presented. These arguments are based on results that were obtained independently by P. V. Novitsky, M. A. Zemelman, V. Ya. Kreinovich and based on rules for measurement results errors expression that are regulated by domestic normative guides. In the report examples of programs code modification for giving them the metrological self-assurance are presented. It highlights that this modification is insignificant. Metrological attestation of such programs is performed with Monte-Carlo method.

References

1. L. K. Reznik, W. C. Jonson, G. N. Solopchenko. Fuzzy interval as a Basis for Measurement Theory, in Proc. NASA Conf. NAFIPS'94. San-Antonio, Texas. Pp. 405–406, 1994.
2. A. Griewank. On Automatic Differentiation, in: Mathematical Programming: Recent Developments and Applications. Kluwer Academic Publisher, pp.83–108, 1989.